

Title	Schauder-Tychonoff ノ不動点定理ニ就テ
Author(s)	野水, 克己
Citation	全国紙上数学談話会. 2(6) p.149-p.152
Issue Date	1947-06-13
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75192
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

57. Schauder-Tychonoff /

不動点定理ニ就テ

(阪大) 野木 克己

Schauder が *Stud Math* 2 (1930) で *linear metric space* ニ於ケル不動点定理ヲ與ヘ Tychonoff ハ *Math. Ann.* 171 (1935) デ必ズシモ *metrisable* デナイ *linear topological space* ノ場合ニ ソレガ *locally convex* デアルトイフ條件ノ下ニ擴張シテ証明シ

テアル。併シ *locally convex* トイフ仮定ハ不要デ全ク一般ノ *linear topological space*ニ於テ定理ガ成立スル。ヨク用ヒラレル定理デアルカ
ソノ後コノコトヲ注意シテアルノヲ思ナイヤウニ思フノデ以下ソレヲ述ベル。

定理 *linear topological space*ノ *convex, compact set*ノ天自身ヘノ連続写像ニハ必ず不動点ガ存在スル。

(証明) *metric*ノアル場合、Schauderノ証明ハ不完全ナノデソレヲ
訂正シソレガ一般ノ場合ニモ成リソノマ、(*metric*ノ代リニ *uniform structure*ヲ用ヒテ)成立ツコトヲ注意スル。

1° *metric*ノアル場合

linear metric space R ノ *metric* ρ ハ $\rho(a, b) = \rho(a - x)$
ヲ満足スルトシテヨイ。次ノ *Lemma*ハ全ク容易ニ証明出来ル。

Lemma 任意ノ整数 n (≥ 2) 及任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ次ノヤウナ $\delta = \delta(n, \varepsilon)$ ガ存在スル: $x_1, \dots, x_n \in R$ ヲ $\rho(x_i, x_j) < \delta$ ($i, j = 1, \dots, n$)ナルヤウニトレバ $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ ナル任意ノ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ニ對シ $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ ハ $\rho(x, x_k) < \varepsilon$ ($k = 1, \dots, n$)ヲ満足スル。

R ノ *convex, compact set*ヲ H 。連続変換ヲ f , $f(H) \subset H$ トスル。
 H ガ *compact*ナコトカラ 任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ H ノ ε -net $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ ガ存在スル。 ξ_1, \dots, ξ_s ヲ張ラレル *convex, closed set*ヲ H_0 トスルト明ラカニ $H_0 \subset H$ 。 H_0 ノ有限ケ元ノ *complex*ト考ヘラレルカラ
ソレヲ分割シテ、ソノ各一ツノ *simplex*ノ頂点ハ互ニ *Lemma*ノ $\delta(n, \varepsilon)$ (但 $\dim H_0 = n-1$ トスル)以下ノ距離ニアルヤウコスル。コノ
分割サレタ *complex*ヲ H_0' ヲ表シ。 H_0' ニ於ケル連続変換 f' ヲ次ノヤ
ウニ定義スル。 d ヲ H_0' ノ一ツノ *simplex*ノ頂点トスルトキ、 $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$
ガ H ノ ε -netナルコト及ビ $f(H) \subset H$ ナルコトカラ $\rho(f(d), \xi_i) < \varepsilon$ ナル
 ξ_i ガ存在スル。ソノ ξ_i デ $f'(d) = \xi_i$ トオク。 H_0' ノ *simplex*ノ頂点
ニ對シテコノヤウニ定義サレタ f' ヲ H_0' ノ全体ニ連続ニ拡張スル。例ヘバ

simplex (d_1, \dots, d_n) ノ点 $x = \sum_{i=1}^n d_i d_i$ ($d_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n d_i = 1$)ニ對シテ
 $f'(x) = \sum_{i=1}^n d_i f'(d_i)$ トスレバヨイ。明ラカニ $f(H_0') \subset H_0'$ (コノ

マデハ *Schauder* ノ通りデアル). マタ *Lemma* ニヨリ H' ノ各 *Simplex* 内ノ任意ノ点カラソノ *Simplex* ノ任意ノ頂点ヘノ距離ハ ε 以下デアルコトニ注意スル.

況ニ *topology* デヨリ知ラレテアルヤウニ *complex* H_0' ヲ更ニ分割ヲ細カクスルコトニヨリ (ソノ際重心分割ヲ用ヒルコトニスル). 分割サレタ *complex* H_0'' カラ H_0' ヘノ連続変換 f' ヲ H_0'' カラ H_0' ヘノ *Simplicial mapping* f'' (H_0'' ノ *Simplex* ガ H_0' ノ *Simplex* ヘ移ルヤウナ) デ近似スルサウスレバ d ヲ H_0' ノ *simplex* ノ頂点トスルトキ f' ノ定義カラ,

$$(1) \quad \rho(f(d), f'(d)) < \varepsilon$$

マタ d ヲ H_0'' ノ *simplex* ノ頂点トスレバ f'' ノ定義カ

$$(2) \quad \rho(f(d), f''(d)) < \varepsilon$$

ガ成立ツ.

サテ f'' ハ有限次元ノ *convex compact set* H_0'' ノ自身ヘノ連続変換デアルカラ不動点 χ_0 ヲモツ.

$$(3) \quad f''(\chi_0) = \chi_0$$

χ_0 ノ属スル H_0'' ノ *simplex* ノ頂点デ同時ニ H_0' ノ *simplex* ノ頂点デアルモノヲ d トスル. カカル頂点 d ノ存在ハ H_0' カラ H_0'' ヘノ分割ニ重心分割ヲ用ヒタコトカラ分ル. コノ d ニ對シテ (1), (2) ガ同時ニ成立ツ. マタ f'' ガ *simplicial* デアルコトカラ $f''(\chi), f''(d)$ ハ H_0' ノ同ジ *simplex* 属

$$(4) \quad \rho(f''(\chi_0), f''(d)) < \varepsilon$$

マタ明ラカニ

$$(5) \quad \rho(\chi_0, d) < \varepsilon$$

$$(1) - (5) \text{ニヨリ} \quad \rho(d, f(d)) < 4\varepsilon$$

即チ以上デ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ $\rho(d, f(d)) < \varepsilon$ ナル点 $d \in H_0 \subset H$ ガ存在スルコトガイヘタ. $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ヲトリ. ソレニ對應スルモノヲ $d_n \in H$ ($n=1, 2, \dots$) トスレバ H ガ *compact* ナコトカラ $\{d_n\}$ ノ集積点 $d \in H$ ガ存在シテ明ラカニ $f(d) = d$ 即チ d ノ不動点デアル.

2° 一般ノ場合

R ヲ *linear topological space* トスル. 0 ノ 近傍系 $\{U_\alpha\}$ ニヨツテ R ノ *uniform structure* ガ考ヘラレバ、定理ノ証明ハ *metric*ノ代リニコノ *uniform structure* デ 例ヘバ $\rho(x, y) \in U_\alpha$ ノトコロ $= x - y \in U_\alpha$ トイフヤウニヤツテコケバヨイ. H ハ有限次元タカラ、ソノ中デハ *Euclid* 空間トシテ、*metric* ガ入リ、任意ノ $U_\alpha =$ 對シテ $\delta > 0$ ガ存在シテ $\rho(x, y) < \delta, x, y \in H_0$ ナラバ $x - y \in U_\alpha$ トナルコトニ注意スレバ 1° ノ (1), (2), (4), (5) が 夫々

- (1)' $f(d) - f'(d) \in U_\alpha$
- (2)' $f'(d) - f''(d) \in U_\alpha$
- (4)' $f''(x_0) - f''(d) \in U_\alpha$
- (5)' $x_0 - d \in U_\alpha$

トシテ成立チ 從ツテ $d - f(d) \in U_\alpha + U_\alpha + U_\alpha + U_\alpha$ トナルコトハ 繰返スマデモナイ. *topological group* ノ性質カラ 任意ノ $U_\alpha =$ 對シテ $U_\beta + U_\beta + U_\beta + U_\beta \subset U_\alpha$ ナル U_β ガ存在スルカラ 結局上ノコトカラ 任意ノ $U_\alpha =$ 對シテ $d - f(d) \in U_\alpha$ ナル点 $d \in H$ ガ存在スルコトガナル.

$x \in H \rightarrow x - f(x)$ ナル連続変換デ $\overline{U_\alpha}$ ノ逆像ヲ $H_\alpha = \{x \in H \mid x - f(x) \in \overline{U_\alpha}\}$ トスレバ H_α ハ H ノ *closed set*. 任意ノ $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n} =$ 對シ $U_\beta \subset U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}$ ナル U_β ガ存在スルコトカラ $\{H_\alpha\}$ ハ *finite intersection property* ヲモツ. 從ツテ H ガ *compact* ナコトカラ $\bigcap H_\alpha =$ 含マレル点 d ガ存在スル. 即チ任意ノ $U_\alpha =$ 對シテ $d - f(d) \in \overline{U_\alpha}$. シカルニマタ *group, regularity* カラ 任意ノ $U_\alpha =$ 對シテ $\overline{U_\beta} \subset U_\alpha$ ナル U_β ガ存在スルコトニ注意スレバ $d - f(d)$ ハスベテノ $U_\alpha =$ 含マレ. 從ツテ $d - f(d) = 0 \therefore d = f(d)$ 故ニ d ハ不動点デアル. 之ヲ證明ガ終ル.

(1947. 6. 13)